

## I SOLIDI PLATONICI

Una tradizione assai nota e probabilmente non molto antica tramanda che all'ingresso dell'Accademia platonica si leggesse l'iscrizione: "Non entri l'inesperto in geometria".

Si tratta quasi certamente di una tradizione priva di qualsiasi fondamento di verità storica, ma che, comunque, merita di essere ricordata perché assai bene coglie lo spirito del pensiero platonico e altrettanto bene rappresenta il progetto educativo proposto dall'Accademia e confermato dallo stesso Platone in numerosi luoghi dei dialoghi.

Quando però si voglia precisare con un minimo di rigore il senso dell'importanza della matematica all'interno del pensiero platonico, le cose si fanno subito molto più complicate.

Una riflessione seria sulla matematica e sulla filosofia della matematica nel mondo antico trova sempre ostacoli non lievi. In primo luogo, i filologi e gli storici della filosofia antica, che sono in grado di leggere i testi, difficilmente sono anche in grado di comprendere il significato e il valore di ciò che leggono; i matematici, che sono in grado di comprendere perfettamente i contenuti, trovano un ostacolo non facilmente rimovibile nella lingua e nello stato in cui spesso ci sono pervenuti i documenti.

Platone nel **Timeo** descrive i rapporti numerici come il principio fondamentale, il modello, di tutte le cose, per il quale l'anima del mondo è immanente al cosmo e gli conferisce la sua struttura ordinata ed armonica ( VIII, 35b-36a ) mediante costruzioni basate sui numeri che corrispondono ai rapporti numerici dell'ottava e della quinta musicale, pervenendo così alla determinazione dei rapporti armonici che regolano il moto dei pianeti. Vediamone la descrizione :

( VI [e] ) *"L'artefice era buono e come tale senza invidia per alcuna cosa. Volle quindi che tutte le cose divenissero simili a lui. Questa è quindi la cagione della generazione dell'universo."*

Prese dunque quanto c'era ( c'era già qualcosa ) di visibile, di inquieto e in agitazione sregolata e disordinata e lo ridusse dal disordine all'ordine. Ragionò che ciò che ha intelligenza è più bello di ciò che è senza, e che nessuna cosa poteva essere intelligente senz'anima. Per questo motivo fabbricò l'universo componendo l'intelligenza nell'anima e l'anima nel corpo perché l'opera fosse la più bella secondo natura e la più buona che si potesse. E a somiglianza di quale essenza animata ? Non di ciò che ha forma di parte, di per sé imperfetto, ma simile a quello di cui gli altri, cioè tutte le altre essenze considerate singolarmente e nei loro generi, sono parte. Volendo cioè che fosse bello e perfetto, compose una sola essenza visibile che dentro sé raccogliesse tutti gli " animali " .[ In base a questo giudizio anche il cielo è unico. Se ce ne fossero altri sarebbe una parte dei tanti e quindi imperfetto ].

*"Affinché dunque questo mondo fosse perfetto, per questa ragione, non fece né due né infiniti mondi, ma v'è questo solo unigenito e generato cielo, e ancora vi sarà. Ciò che è stato creato deve essere corporeo e visibile, per questo inizia a crearlo con la terra e col fuoco. Ma non si possono comporre bene due cose senza una terza: ci vuole in mezzo un legame per unirle. Ciò può farlo la proporzione dove il medio sta all'ultimo come il primo sta al medio ma anche il medio sta al primo come l'ultimo al medio, cosicché il medio diventa il primo, e l'ultimo e il primo diventano medi; così accadrà che tutti siano gli stessi e quindi una cosa sola! Ora, se il mondo fosse stato piano, bastava un solo medio, ma, essendo solido, ne occorrono due! Così mise acqua e aria tra fuoco e terra.."*

Erano piani per i Greci i numeri prodotto di due primi e quelli solidi di tre. Il criterio esposto da Timeo vale se si considerano piani e solidi anche i quadrati e i cubi. Il 2 e il 3, chiamati in causa dalla necessità di unir due specie con una terza, che, da sola, non basta,

sono utilizzati da Proclo, matematico e filosofo neoplatonico ( Costantinopoli 412, Atene 485 ), nel suo esempio formulato per chiarire l' affermazione di Timeo. Così, per costruire una proporzione con numeri piani ( presi come quadrati ) basta un solo numero medio proporzionale:  $2^2 = 4$  ;  $3^2 = 9$  ;  $4 : 6 = 6 : 9$ .

Con i numeri solidi ( presi come cubi ) si può solo costruire una proporzione continua usando due numeri:  $2^3 = 8$  ;  $3^3 = 27$ ; i due numeri sono  $2 \times 2 \times 3$  e  $2 \times 3 \times 3$ ;  $8 : 12 = 12 : 18 = 18 : 27$  (Terra e fuoco, numeri solidi, sono uniti da altri due numeri: aria e acqua ).

*“Così compose il cielo visibile e tangibile in modo che come stava il fuoco all'aria stesse anche l'aria all'acqua e come questa l'acqua alla terra: di questi quattro elementi, concorde per proporzione, generò il mondo”.*

Ora all' animale che doveva raccogliere tutti gli animali conveniva una forma che raccogliesse in sé tutte le forme: perciò lo arrotondò a mo' di sfera che di tutte le figure è la più perfetta e la più simile a se stessa , giudicando il simile più bello del dissimile. Lo fece liscio tutt'intorno e di fuori poiché non aveva bisogno di occhi per vedere fuori , dal momento che non c'era niente, non aveva bisogno di orecchie perché non c'era nulla da udire; né di polmoni poiché non c'era aria d'intorno da respirare, né di altri organi di nutrimento e digestione, perché nulla prendeva od emetteva. Un mondo che basta a se stesso è migliore che se fosse bisognoso d'altri. Né mani per prendere o respingere, né gambe e piedi per camminare. Ma gli assegnò il movimento più adatto, quello dei sette che più si accosta all'intelligenza e al pensiero: il moto circolare ( gli altri sono: alto, basso, avanti, indietro, destra, sinistra ).

Fu **Talete** di Mileto (624-545 a.C.), non estraneo all'antico mito cosmogonico di Omero, che faceva di Oceano e Teti, divinità acquatiche, i progenitori dell'universo, a ritenere che l'acqua, ovvero l'umidità, fosse l'elemento primordiale di ogni processo creativo.

Risale invece ad **Anassimene** di Mileto (585-546 a.C.) la concezione che l'aria debba essere considerata il principio ogni cosa, origine di tutti i corpi per sua condensazione o rarefazione.

Per **Senofane** di Colofone (nato tra il 580 e il 565 a.C.), tutto quanto nasce è terra e acqua.

Per **Eraclito** poi ( VI-V sec a.C.) il solo elemento generatore della vita è il fuoco , ed è in virtù di esso che tutta la realtà si presenta come un perpetuo divenire, una eterna lotta di contrari, dal momento che il calore produce la vita ma anche la consuma.

Per **Empedocle** infine (V sec. a.C.) quattro sono gli elementi primordiali: fuoco, aria, terra e acqua.

Tutte queste concezioni verranno in seguito confutate, e lo si può già vedere nel poema sulla natura di Lucrezio, ma l'apparente ingenuità di questi primi pensatori non deve far passare in secondo piano il forte interesse per le questioni naturalistiche presente in questi primi tentativi di descrivere la realtà.

Nella concezione platonica della creazione dell'universo tre sono le cose indispensabili:

- il modello
- l'immagine del modello
- il ricettacolo di tutto ciò che si genera ( la “nutrice” ), ovvero la sintesi indistinta e mai identica, disposta senza ragione né misura, di fuoco, aria, acqua e terra – “e stando così le cose, egli ( il demiurgo ) le adornò di forme e numeri”( XIX [b] ) - ; l'assunto è che gli “elementi primi”, ovvero le figure geometriche e il numero, sono origine delle cose, del cielo e del tempo.

Nel Timeo il principio armonico e la ragione matematica alla base della teoria dei quattro corpi è dunque la proporzione, e il principio geometrico, il primo elemento fondamentale che costituisce tutti i corpi, viene detto essere il triangolo:

( X X )“E prima di tutto che fuoco e terra e acqua e aria siano corpi è chiaro ad ognuno. Ma ogni specie di corpo ha anche profondità; e la profondità è assolutamente necessario che contenga in sé la natura del piano, e una base di superficie piana si compone di triangoli. Tutti i triangoli derivano poi da due triangoli, ciascuno dei quali ha un angolo retto e due acuti: e l’uno (A) di questi triangoli ha da ogni parte una porzione uguale di angolo retto diviso da lati uguali, e l’altro (B) due parti diseguali di angolo retto diviso da lati diseguali.”

E’ chiaro che, mentre dei triangoli di tipo (A) c’è una sola forma, le forme di (B) sono infinite.

“Pertanto, di queste forme infinite, dobbiamo scegliere la più bella ... Noi dunque, dei molti triangoli ... ne poniamo uno come il più bello, quello che ripetuto forma un terzo triangolo ch’è equilatero”( è il triangolo rettangolo scaleno con il cateto minore uguale alla metà dell’ipotenusa )

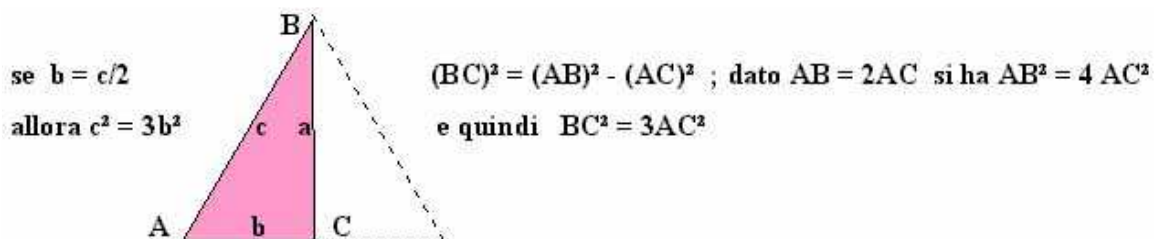


“Dunque I due triangoli scelti, dei quali sono stati fatti i corpi del fuoco e degli altri elementi siano l’ isoscele e quello che ha sempre il quadrato del lato maggiore triplo del quadrato del minore” ( infatti il triangolo che <<ripetuto>>dà quello equilatero così si comporta ):

*“Dai triangoli scelti nascono le quattro specie, ma tre da quel solo che ha i lati diseguali e la quarta è formata, essa sola, dal triangolo isoscele..le quattro specie non possono dunque dissolversi le une nelle altre, ma quelle tre sì....e questo basti della reciproca trasformazione della specie” (24). Ora diciamo come si è formata ciascuna specie:*

*La prima, la più semplicemente costituita, ha come elemento di essa il triangolo con l’ipotenusa doppia del lato minore; se si compongono insieme due siffatti triangoli secondo la diagonale e questo si ripete tre volte in modo che le diagonali e i lati piccoli convergano nello stesso punto come in un centro, nasce, di sei triangoli, un solo triangolo equilatero ...”*

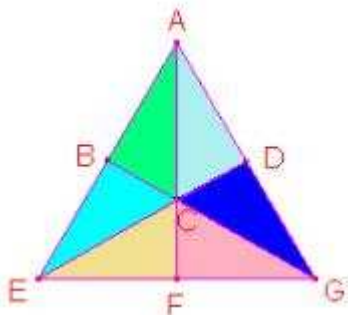
“Dunque I due triangoli scelti, dei quali sono stati fatti i corpi del fuoco e degli altri elementi siano l’ isoscele e quello che ha sempre il quadrato del lato maggiore triplo del quadrato del minore



*“Dai triangoli scelti nascono le quattro specie, ma tre da quel solo che ha i lati diseguali e la quarta è formata, essa sola, dal triangolo isoscele..le quattro specie non possono dunque dissolversi le une*

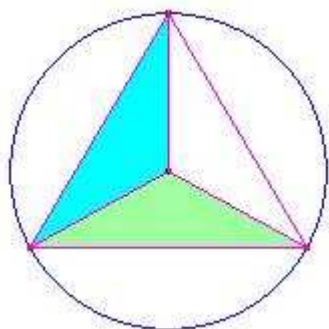
nelle altre, ma quelle tre sì...e questo basti della reciproca trasformazione della specie" (24). Ora diciamo come si è formata ciascuna specie:

La prima, la più semplicemente costituita, ha come elemento di essa il triangolo con l'ipotenusa doppia del lato minore; se si compongono insieme due siffatti triangoli secondo la diagonale e questo si ripete tre volte in modo che le diagonali e i lati piccoli convergano nello stesso punto come in un centro, nasce, di sei triangoli, un solo triangolo equilatero ..."

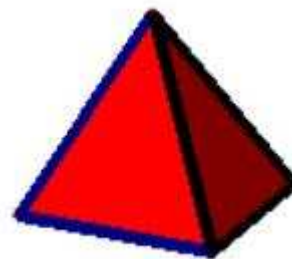


il triangolo ABC viene congiunto con il triangolo ACD mediante l'ipotenusa, che è la diagonale del quadrilatero ABCD, e poi a questa coppia se ne aggiungono altre due in modo che le ipotenuse e i cateti minori convergano in C, si ottiene il triangolo equilatero AEG.

" ..e se quattro triangoli equilateri si compongono insieme, formano per ogni tre angoli piani un angolo solido che viene subito dopo il più ottuso degli angoli piani. E di quattro angoli siffatti si compone la prima specie solida che può dividere l'intera sfera in parti uguali e simili." (25)



Questa prima specie solida è il tetraedro, piramide regolare che ha 4 triangoli equilateri come facce ed è assunto come forma del fuoco.



Prima di procedere alla identificazione delle altre forme ricordiamo che i soli poligoni regolari con cui si possono costruire questi solidi sono:

1. il triangolo equilatero
2. il quadrato
3. il pentagono

Con poligoni con più di cinque lati non è possibile, e vediamolo già con l'esagono: essendo tre le facce che devono concorrere in un vertice ed avendo l'esagono angoli al vertice di  $120^\circ$ , le tre facce, risultando complanari, e formando un angolo di  $360^\circ$ , non possono definire un solido

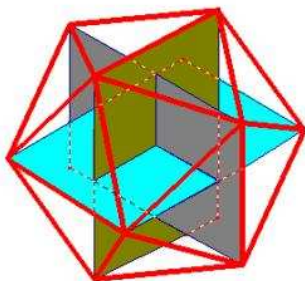
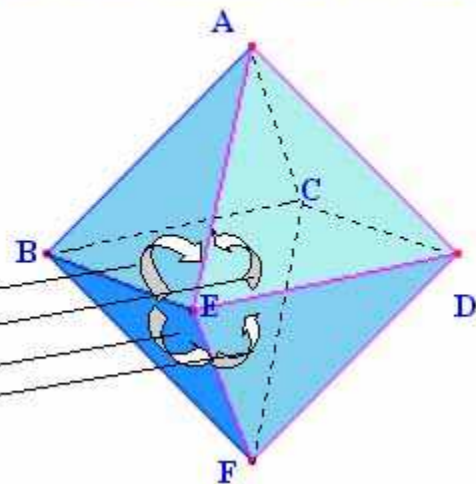
Veniamo alla seconda specie.

“la seconda figura poi si forma degli stessi triangoli, riuniti insieme in otto triangoli equilateri, in modo da fare un angolo solido di quattro angoli piani: e ottenuti sei angoli siffatti, il secondo corpo ha così il compimento. Questa seconda figura, **forma dell'aria**, è quella dell'ottaedro.”

Sei angoli siffatti  
e  
otto facce triangolari .



Quattro angoli  
piani formano  
un angolo solido

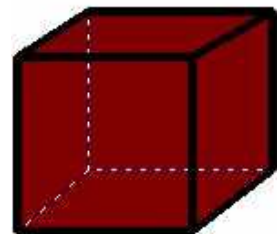


“ la terza specie è poi formata di centoventi triangoli congiunti insieme e di dodici angoli solidi, compresi ciascuno da cinque triangoli equilateri piani, ed ha venti triangoli equilateri per base. ( questa terza figura, quella dell'acqua, è l'icosaedro regolare e poiché ciascuna faccia è un triangolo equilatero composto da sei triangoli rettangoli scaleni, l'icosaedro risulta così composto di 120 elementi, e similmente l'ottaedro di 48 e il tetraedro di 24 ) E l'uno dei due elementi, dopo aver generato queste figure, aveva cessato l'opera sua.”

“Ma il triangolo isoscele generò la natura della quarta specie ( questa quarta figura, forma della terra, è il cubo ) componendosi insieme quattro (non è chiarito perché quattro e non due, ma forse la spiegazione sta nel fatto che, con due soli triangoli, potrebbe esserci ambiguità su quale diagonale considerare per individuarli ) triangoli isosceli con gli angoli retti congiunti nel centro, in modo da formare un tetragono equilatero (un quadrato): sei di questi tetragoni equilateri connessi insieme compiono otto angoli solidi, ciascuno dei quali deriva dalla combinazione di tre angoli piani retti. E la figura del corpo risultante divenne cubica, con una base di sei tetragoni equilateri piani.



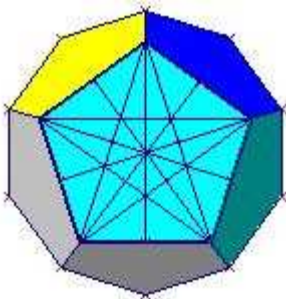
E' importante il passo del Timeo [ XXI-XXII ] che descrive le ragioni che implicano le associazioni tra le forme e le specie ed i loro possibili modi di vicendevole trasformazione, poiché rappresenta uno dei più significativi paradigmi delle immagini delle figure nella scienza:



“E alla terra diamo la figura cubica: perché delle quattro specie la terra è la più immobile, e dei corpi il più plasmabile. Ed è soprattutto necessario che tale sia quel corpo che ha le basi più salde. Ora dei triangoli posti da principio, è più salda naturalmente la base di quelli a lati uguali che di quelli a lati disuguali, e quanto alle figure piane che compone ciascuna specie di triangoli, il tetragono equilatero, tanto nelle parti che nel tutto, è di

necessità più solidamente assiso del triangolo equilatero....e poi all'acqua la forma meno mobile delle altre, al fuoco la più mobile, e all'aria l'intermedia: e così il corpo più piccolo al fuoco, il più grande all'acqua, e l'intermedio all'aria, e inoltre il più acuto al fuoco, il secondo per acutezza all'aria, e il terzo all'acqua...Ora di tutte queste forme quella che ha il minor numero di basi è necessariamente la più mobile per natura, perché è la più tagliente e in ogni sua parte la più acuta di tutte, ed è anche la più leggera, essendo costituita dal minor numero delle medesime parti, così la seconda ha in secondo grado tutte queste qualità, e in terzo grado la terza. Sia dunque conforme e retta e verosimile ragione la figura della piramide elemento e germe del fuoco, e diciamo la seconda per generazione quella dell'aria e la terza quella dell'acqua. E tutti questi elementi bisogna concepirli così piccoli che nessuna delle singole parti di ciascuna specie possa essere veduta da noi per la sua piccolezza, ma riunendosene molte insieme, si vedano le loro masse. E quanto poi ai rapporti dei numeri, dei movimenti e delle altre proprietà, il Demiurgo, dopo aver compiuto queste cose con esattezza, fino a che lo permetteva la natura della necessità spontanea o persuasa, collocò dappertutto la proporzione e l'armonia. ....

La terra, incontrandosi col fuoco e disciolta dall'acutezza di esso, errerebbe qua e là...fino a che le sue parti incontrandosi si riunissero di nuovo, perché esse non potrebbero mai passare in altra specie. Ma l'acqua, disgregata dal fuoco o anche dall'aria, può darsi che ricomponendosi divenga un corpo di fuoco o due di aria. E se l'aria è in dissoluzione, dai frammenti d'una sola delle sue parti possono nascere due corpi di fuoco... E viceversa due corpi di fuoco si ricompongono insieme in una sola specie d'aria. E se l'aria è soverchiata da due parti e mezzo d'aria, si comporrà una parte intera d'acqua." Tutto ciò diventa



comprensibile tenendo conto che con il numero di facce dell'icosaedro, forma dell'acqua, è possibile comporre due ottaedri, forma dell'aria, e un tetraedro, forma del fuoco, e, inoltre, che con le facce dell'ottaedro si possono comporre due tetraedri.

"Restava una quinta combinazione e il Demiurgo se ne giovò per decorare l'universo." Di questa quinta figura, il dodecaedro, che ha per facce 12 pentagoni regolari, nulla di più si legge nel Timeo; il motivo di assenza di approfondimento va forse individuato nel fatto che questa figura non presenta una struttura di composizione assimilabile a quella delle altre figure, dal momento che, con i

triangoli rettangoli del tipo precedentemente descritto, i cui lati sono proporzionali alle terne  $[1, 2, \sqrt{5}]$ ,  $[1, 2, \sqrt{5}]$ , è possibile costruire triangoli equilateri e quadrati, ma non pentagoni. Il dodecaedro viene associato quindi all'immagine dell'intero universo, origine della quintessenza ed immagine di perfezione poiché più degli altri poliedri regolari, già secondo le teorie pitagoriche, approssima la sfera.

L'idea che questa figura sia quella che più si avvicina alla perfezione per la maggiore approssimazione al volume della sfera, che è sinonimo di perfezione e verità poiché sempre uguale a se stessa da qualsiasi punto di vista la si osservi, è in effetti stata utilizzata da Platone nel dialogo Fedone [ 110b-110c ], riferendo però, in questo dialogo, la prerogativa della figura alla terra; Platone lascia però intendere che gli argomenti con i quali descrive la terra non hanno alcun nesso con una qualche procedura scientifica chiamando mito la descrizione che segue:

*“E se è bello esporre un mito, è cosa degna ad ascoltarsi di che qualità siano le cose che si trovano sopra la terra al di sotto della volta del cielo....Si dice dunque..... che questa nostra terra a vedersi, se uno la guarda dall’alto, sia variopinta come le palle a dodici spicchi (26)...ed è meravigliosa per bellezza...”*

La scoperta di questa figura può essere fatta risalire almeno al VI sec. A. C., poiché oggetti a forma di dodecaedro appartenenti a quel periodo, sono stati rinvenuti in vari siti archeologici; i cristalli di pirite, che hanno forma dodecaedrica quasi perfetta, solo 4 dei 5 lati sono uguali, e che si potevano rinvenire facilmente in molte zone della Magna Grecia, possono essere stati la fonte di ispirazione. Questa antica scoperta non è che una tra le tante che hanno fatto comprendere come le figure della geometria non sono solo immagini confinate nelle menti creative dei geometri e dei matematici ( basti pensare alle traiettorie coniche ), bensì vere e proprie forme della realtà. E non pare troppo azzardato ritenere che anche le più recenti teorie delle stringhe e delle membrane, nelle quali la dinamica di insiemi di poligoni ha importanti applicazioni, ci possano condurre ad una conoscenza più approfondita della natura.

Cinzia Pipitone  
Vice-presidente “Salto Quantico”